УДК 519.2

Т.В. Авдєєва
(НТУУ «Київський політехнічний університет імені Ігоря Сікорського)
Л.М. Іллічева, к.ф.-м.н.
(Національний авіаційний університет, Україна)

Узагальнене рівняння фільтрації і схема Калмана-Бьюсі

Наведено узагальнене рівняння фільтрації, звідки схема Калмана-Бьюсі випливає як частинний випадок.

Постановка задачі фільтрації

Нехай $(\theta, \xi) = ((\theta_n, \xi_n)\ \ ), t \geq 0,$ для якого може спостерігатися тільки друга компонента $\xi = (\xi_t), t \geq 0$. У кожній момент часу t необхідно, спираючись на спостереження $\xi_0^t = \{\xi_s\ ,\ 0 \leq s \leq t\}$, оцінювати значення θ_t, яке не спостерігається. Тобто, треба виконувати оцінювання (фільтрацію) θ_t по ξ_0^t.

Відомо, якщо $M\theta_t^2 < \infty$, то оптимальною у середньоквадратичному сенсі оцінкою θ_t по ξ_0^t є апостреріорне середнє $m_t = M\left(\theta_t | F_t^\xi\right)$, де $F_t^\xi = \sigma\{\omega: \xi_s\ ,\ 0 \leq s \leq t\} - \sigma -$ алгебра, яка породжується величинами ξ_0^t. Рішення задачі оптимальної фільтрації зводиться до знаходження умовних математичних сподівань $m_t = M\left(\theta_t | F_t^\xi\right)$.

Із обчислювальної точки зору бажано, щоб формули, які «визначають» фільтр m_t, t $\geq$ 0 мали рекурентний характер.

Тобто, значення $m_{t+\Delta}, \Delta \geq 0$ повинно відновлюватися по значенню m_t і спостереженням $\xi_t^{t+\Delta} = \{\xi_s, t \leq s \leq t + \Delta\}$. У випадку дискретного часу $t = 0,1,2, \ldots$ найпростішою формою подібних рекурентних співвідношень слугує, наприклад, рівняння:

$$\Delta m_t = a(t, m_t) + b(t, m_t)(\xi_{t+1} - \xi_t),$$

де $\Delta m_t = m_{t+1} - m_t$. У випадку неперервного часу t $\geq$ 0 таку форму мають стохастичні диференціальні рівняння:

$$dm_t = \ a(t, m_t) + b(t, m_t) d\xi_t.$$

Нехай $\theta -$ гаусівська випадкова величина з $M\theta = m,\ D\theta = \gamma$, що записують $\theta \sim N(m, \gamma)$. Якщо спостерігається послідовність

$$\xi_t = \theta + \varepsilon_t,\ \ t = 1,2, \ldots$$

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots . -$ незалежні гауссівські випадкові величини з нульовим середнім та одиничною дисперсією.

Тоді для $m_t = M(\theta | \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_t)$ і для помилки «відслідковування» $\gamma_t = M(\theta -\ m_t)^2$справедливы рекурентні формули:

$$\Delta m_t = \frac{\gamma_t}{1 + \gamma_t}[\xi_{t+1} - m_t], \qquad \Delta\gamma_t = -\frac{\gamma_t^2}{1 + \gamma_t}$$

де $\Delta m_t = m_{t+1} - m_t\ ,\ \ \Delta\gamma_t = \gamma_{t+1} - \gamma_t$.

Якщо ускладнити приклад, можна розглянути процес ξ_t , t = 1,2,….який визначається співвідношенням:

$$\xi_{t+1} = A_0(t,\xi) + A_1(t,\xi)\theta + \varepsilon_{t+1},$$

де функції $A_0(t,\xi), A_1(t,\xi)$ вважаються $F_t^{\xi} = \sigma\{\omega: \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_t\}$ − вимірними (тобто, $A_0(t,\xi), A_1(t,\xi)$ при кожному t залежать лише від значень $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_t$.

В цій схемі для оптимальної оцінки $m_t = M\left(\theta_t | F_t^{\xi}\right)$ та умовної дисперсії $\gamma_t = M\left[(\theta - m_t)^2 |\, F_t^{\xi}\right]$ також виконуються рекурентні співвідношення:

$$\Delta m_t = \frac{\gamma_t A_1(t,\xi)}{1 + {A_1}^2(t,\xi)\gamma_t}[\xi_{t+1} - A_0(t,\xi) - A_1(t,\xi)m_t], \;\; m_0 = m,$$

$$\Delta\gamma_t = -\frac{{A_1}^2(t,\xi)\gamma_t^2}{1 + {A_1}^2(t,\xi)\gamma_t}, \quad \gamma_0 = \gamma$$

Рекурентні формули для випадкового процеса

Можна замість випадкової величини θ розглядати випадковий процес θ_t.

Нехай випадковий процес $(\theta,\xi) = (\theta_t, \xi_t), t = 0,1,2, \dots$ описується рекурентними рівняннями:

$$\theta_{t+1} = a_0(t,\xi) + a_1(t,\xi)\theta_t + b(t,\xi)\varepsilon_1(t+1),$$
$$\xi_{t+1} = A_0(t,\xi) + A_1(t,\xi)\theta_t + B(t,\xi)\varepsilon_2(t+1),$$

де $\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t),\; t = 1,2, \dots$ послідовність незалежних величин, які мають нормальний розподіл $N(0,1)$ і не залежать від $(\theta_0,\; \xi_0)$. Функції $a_0(t,\xi)$, ..., $B(t,\xi)$ вважаються F_t^{ξ} − вимірними при кожному , $t = 0,1,2, \dots$

Для одержання рекурентних рівнянь для оцінок для $m_t = M\left(\theta_t | F_t^{\xi}\right)$ та умовної дисперсії $\gamma_t = M\left[(\theta - m_t)^2 |\, F_t^{\xi}\right]$ припускається, що умовний розподіл $P(\theta_0 \le x | \xi_0)$ є нормальним. Тоді описана вище послідовність (θ,ξ) є умовно-гауссівською, а з цього випливає, що умовний розподіл $P\left(\theta_t \le x | F_t^{\xi}\right)$ є гауссівським (м. йм.). Такий розподіл характеризується двома умовними моментами m_t, γ_t, що дозволяє отримати замкнену систему рівнянь:

$$m_{t+1} = a_0 + a_1 m_t + \frac{\gamma_t a_1 A_1}{B^2 + {A_1}^2\gamma_t}[\xi_{t+1} - A_0 - A_1 m_t], \;\; m_0 = m,$$

$$\gamma_t = [a_1^2\gamma_t + b^2] - \frac{{A_1}^2\gamma_t^2 a_1^2}{B^2 + {A_1}^2\gamma_t}, \quad \gamma_0 = \gamma$$

Рівняння оптимальної фільтрації

Вимірний функціонал $\{a_t(\theta, x),\; t \ge 0, -\infty < \theta < \infty,\; x \epsilon C\},\; C -$ множина неперервних функцій; $W = (W_t, F_t),\; t \ge 0$ − вінерівський процес. Випадковий процес $W = (W_t, F_t),\; t \ge 0$ називається вінерівським (по відношенню до сімейства $F = \left((F_t), t \ge 0\right)$, де $\left((F_t), t \ge 0\right))$ − неспадне сімейства σ – алгебр, якщо:

1) траєкторії $W_t, t \geq 0$, неперервні по t, причому P – майже ймовірно (м.йм.);

2) $W = (W_t, F_t),\ t \geq 0$ є квадратично інтегровним мартингалом з $W_0 = 0$ і $M[(W_t - W_s)^2 | F_s] = t - s,\ t \geq s$.

Вимірний функціонал $\{a_t(\theta, x),\ t \geq 0, -\infty < \theta < \infty,\ x \epsilon C\}$ при кожному фіксованому θ вважається $B_t -$ вимірним при кожному $t \geq 0$, де $B_t = \sigma\{x: x_s\ ,\ s \leq t\} - \sigma$ – підалгебри у вимірному просторі $(C, B) -$ неперервних функцій $x = (x_t), t \geq 0$ з $x_0 = 0$ (тобто, є не попереджаючим функціоналом).

Нехай $(\theta, \xi) = (\theta_t, \xi_t), 0 \leq t \leq T -$ неперервний випадковий процес дифузійного типу із

$$d\theta_t = [a_0(t,\xi) + a_t(t,\xi)\theta_t]dt + b_1(t,\xi)dW_1(t) + b_2(t,\xi)dW_2(t)$$

$$d\xi_t = [A_0(t,\xi) + A_1(t,\xi)\theta_t]dt + B(t,\xi)dW_2(t)$$

де W_1, W_2 – незалежні між собою вінерівські процеси; кожний із вимірних функціоналів $a_i(t,x),\quad A_i(t,x), b_j(t,x), B(t,x), i = 0{,}1, j = 1{,}2 -$ вважаються, що є не попереджаючим (тобто, вимірними відносно $\sigma -$ алгебрі у просторі неперервних функцій $x = \{x_s, s \leq T\}$, $\sigma -$алгебра породжується значеннями $x_s, s \leq t$).

При ряді вимог, які необхідні для дотриманні умов теореми, можна зробити висновок, що випадковий процес $(\theta, \xi) = (\theta_t, \xi_t), 0 \leq t \leq T$ є умовно-гауссівським, тобто для довільних t і $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n \leq t$ умовні розподіли

$$F_{\xi_t^0}(x_0, \dots, x_n) = P\left(\theta_{t_0} \leq x_0, \dots, \theta_{t_n} \leq x_n | F_t^{\xi}\right)$$

є гауссівськими (Р-м. йм.).

Заключне твердження стосується диференційних співвідношень для $m_t\,, \gamma_t$:

$$\begin{aligned} dm_t = [a_0(t,\xi) + a_t(t,\xi)m_t]dt \\ + \frac{b_2(t,\xi)B(t,\xi) + \gamma_t A_1(t,\xi)}{B^2(t,\xi)}[d\xi_t \\ - (A_0(t,\xi) + A_1(t,\xi)m_t)dt], \end{aligned}$$

$$\dot{\gamma_t} = 2a_1(t,\xi)\gamma_t + b_1^2(t,\xi) + b_2^2(t,\xi) - \left(\frac{b_2(t,\xi)B(t,\xi) + \gamma_t A_1(t,\xi)}{B(t,\xi)}\right)^2, \text{ при}$$

$$m_0 = M(\theta_0 | \xi_0), \gamma_t = M[(\theta - m_t)^2 |\ \xi_0]$$

А вже звідти можна одержати, як частковий випадок, рішення системи диференційних рівнянь, коли $m_t = M\left(\theta_t | F_t^{\xi}\right)$, $\quad \gamma_t = M\left[(\theta - m_t)^2 |\ F_t^{\xi}\right]$ задаються формулами:

$$m_t = \frac{m_0 + \gamma_0 \int_0^t \frac{A_1(s,\xi)}{B^2(s,\xi)}[d\xi_s - A_0(s,\xi)ds]}{1 + \gamma_0 \int_0^t \left(\frac{A_1(s,\xi)}{B(s,\xi)}\right)^2 ds}$$

$$\gamma_t = \frac{\gamma_0}{1 + \gamma_0 \int_0^t \left(\frac{A_1(s,\xi)}{B(s,\xi)}\right)^2 ds}$$

Для схеми Калмана-Бьюсі виконуються такі рівності:

$$a_0(t,x) = a_0(t) + a_2(t)x_t\ ,\ \ a_1(t,x) = \ a_1(t),$$

$$A_0(t,x) = A_0(t) + A_2(t)x_t\ ,\ \ A_1(t,x) = \ A_1(t),$$

$$B(t,x) = B(t),\quad b_i(t,x) = b_i\,(t),\ i = 1{,}2$$

Наведені диференціальні рівняння для m_t, γ_t будуть мати вигляд:

$$dm_t = [a_0(t) + a_1(t)m_t + a_2(t)\xi_t]dt + \left[b_1(t) + \frac{A_1(t)\gamma_t}{B(t)}\right] d\overline{W}_t,$$

$$d\xi_t = [A_0(t) + A_1(t)m_t + A_2(t)\xi_t]dt + B(t)d\overline{W}_t$$

Ця система має єдине сильне рішення в умовах існування рішення для схеми Калмана-Бьюсі.

Список літератури

1. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов, гл. ред. ф.-м. литер., изд. «Наука», 1974.-695с.
2. Турчин В.М. Математична статистика: навч. посібник – К.: «Академія», 1999.-240с.
3. Пушак Я.С., Лозовий Б.Л. Теорія ймовірностей і елементи математичної статистики: навч. посіб.-Львів.: «Магнолія-2006»,2007.-276с.